



**HAL**  
open science

## Optimalité pour un problème de Bézivin

David Adam

► **To cite this version:**

David Adam. Optimalité pour un problème de Bézivin. Journal de Théorie des Nombres de Bordeaux, 2019, 31 (1), pp.161-177. 10.5802/jtnb.1073 . hal-02548720

**HAL Id: hal-02548720**

**<https://upf.hal.science/hal-02548720v1>**

Submitted on 29 Apr 2020

**HAL** is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

# JOURNAL

de Théorie des Nombres  
de BORDEAUX

*anciennement Séminaire de Théorie des Nombres de Bordeaux*

David ADAM

**Optimalité pour un problème de Bézivin**

Tome 31, n° 1 (2019), p. 161-177.

<[http://jtnb.cedram.org/item?id=JTNB\\_2019\\_\\_31\\_1\\_161\\_0](http://jtnb.cedram.org/item?id=JTNB_2019__31_1_161_0)>

© Société Arithmétique de Bordeaux, 2019, tous droits réservés.

L'accès aux articles de la revue « Journal de Théorie des Nombres de Bordeaux » (<http://jtnb.cedram.org/>), implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://jtnb.cedram.org/legal/>). Toute reproduction en tout ou partie de cet article sous quelque forme que ce soit pour tout usage autre que l'utilisation à fin strictement personnelle du copiste est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

cedram

Article mis en ligne dans le cadre du  
Centre de diffusion des revues académiques de mathématiques  
<http://www.cedram.org/>

## Optimalité pour un problème de Bézivin

par DAVID ADAM

RÉSUMÉ. Soit  $q$  un entier tel que  $|q| \geq 2$  et  $s$  un entier naturel non nul. Dans cet article, nous montrons qu'une fonction entière  $f$  telle que  $\overline{\lim}_{r \rightarrow +\infty} \frac{\ln |f|_r}{\ln^3 r} < \frac{4s}{27 \ln^2 |q|}$  et qui prend des valeurs entières de Gauss sur  $\{q^m + iq^n \mid m, n \in \mathbb{N}\}$  ainsi que ses  $s - 1$  premières dérivées est un polynôme. De plus la borne  $\frac{4s}{27 \ln^2 |q|}$  est optimale. Cela généralise et améliore un résultat obtenu par Bézivin dans [1].

ABSTRACT. Let  $q$  be an integer such that  $|q| \geq 2$  and  $s$  be a positive integer. In this article, we show that an entire function  $f$  such that  $\overline{\lim}_{r \rightarrow +\infty} \frac{\ln |f|_r}{\ln^3 r} < \frac{4s}{27 \ln^2 |q|}$  and taking Gaussian integer values on  $\{q^m + iq^n \mid m, n \in \mathbb{N}\}$ , as well as its  $s - 1$  first derivatives, is a polynomial. Moreover, the bound  $\frac{4s}{27 \ln^2 |q|}$  is optimal. This generalizes and improves a result obtained by Bézivin in [1].

### 1. Introduction

Pour une fonction entière  $f$ , on note pour  $r \geq 0$ ,

$$|f|_r = \max\{|f(z)| \mid z \in \mathbb{C}, |z| \leq r\}.$$

En 1915, Pólya a montré le

**Théorème 1.1.** *Soit  $f$  une fonction entière sur  $\mathbb{C}$  telle que*

$$\overline{\lim}_{r \rightarrow +\infty} \frac{\ln |f|_r}{r} < \ln 2 \quad \left( \text{resp. } \overline{\lim}_{r \rightarrow +\infty} \frac{\ln |f|_r}{r} < \ln \left( \frac{3 + \sqrt{5}}{2} \right) \right)$$

*et  $f(\mathbb{N}) \subset \mathbb{Z}$  (resp.  $f(\mathbb{Z}) \subset \mathbb{Z}$ ). Alors,  $f$  est un polynôme. De plus, la borne  $\ln 2$  (resp.  $\ln \left( \frac{3 + \sqrt{5}}{2} \right)$ ) est optimale.*

De nombreux résultats analogues ont dès lors été démontrés. Dans [3], Fukusawa a considéré le problème analogue sur les entiers de Gauss. Les travaux de Gel'fond, Masser et Gramain (voir [4, 8, 9]) ont permis d'aboutir au :

**Théorème 1.2** ([8]). *Soit  $f$  une fonction entière sur  $\mathbb{C}$  telle que  $f(\mathbb{Z}[i]) \subset \mathbb{Z}[i]$  et  $\overline{\lim}_{r \rightarrow +\infty} \frac{\ln |f|_r}{r^2} < \frac{\pi}{2e}$ . Alors,  $f$  est un polynôme. De plus, la borne  $\frac{\pi}{2e}$  est optimale.*

---

Manuscrit reçu le 10 avril 2018, révisé le 11 octobre 2018, accepté le 16 novembre 2018.

Classification Mathématique (2010). 30D15, 39B32.

Mots-clefs. Fonctions entières arithmétiques.

Dans [6], Gel'fond obtient un analogue multiplicatif du théorème de Pólya :

**Théorème 1.3** ([6]). *Soit  $q$  un entier tel que  $|q| \geq 2$ . Toute fonction entière  $f$  telle que  $f(q^n) \in \mathbb{Z}$  pour tout  $n \in \mathbb{N}$  et  $\overline{\lim}_{r \rightarrow +\infty} \frac{\ln |f|_r}{\ln^2 r} < \frac{1}{4 \ln |q|}$  est un polynôme. De plus, la borne  $\frac{1}{4 \ln |q|}$  est optimale.*

Dans [1], Bézivin considère un mélange du théorème de Gramain et du théorème du Gel'fond multiplicatif :

**Théorème 1.4** ([1, Théorème 1.1]). *Soit  $q$  un entier tel que  $|q| \geq 2$ . Toute fonction entière  $f$  telle que  $f(q^m + iq^n) \in \mathbb{Z}[i]$  pour tous  $m, n \in \mathbb{N}$  et  $\overline{\lim}_{r \rightarrow +\infty} \frac{\ln |f|_r}{\ln^3 r} < \frac{2}{139 \ln^2 |q|}$  est un polynôme.*

Dans [5] et [7], Gel'fond généralise les théorèmes 1.1 et 1.3 en considérant une fonction entière et ses  $s - 1$  premières dérivées pour un entier naturel  $s$  non nul. Dans le cas où  $s > 1$ , les bornes obtenues ne semblent pas être optimales. Cependant, dans [12], Welter obtient le résultat optimal pour le théorème de Fukusawa–Gramain avec dérivées.

Dans cette note, nous obtenons la borne optimale pour le théorème de Bézivin, ainsi que pour le théorème de Bézivin avec dérivées. Plus précisément, nous montrons le

**Théorème.** *Soit  $q$  un entier tel que  $|q| \geq 2$  et  $f$  une fonction entière sur  $\mathbb{C}$  telle que  $\overline{\lim}_{r \rightarrow +\infty} \frac{\ln |f|_r}{\ln^3 r} < \frac{4s}{27 \ln^2 |q|}$  et  $f^{(\sigma)}(q^n + iq^m) \in \mathbb{Z}[i]$  pour tout  $\sigma \in \llbracket 0, s \llbracket$  et pour tous  $m, n \in \mathbb{N}$ . Alors,  $f$  est polynôme. De plus, la borne  $\frac{4s}{27 \ln^2 |q|}$  est optimale.*

Dans toute la suite,  $q$  et  $s$  sont deux entiers fixés avec  $|q| \geq 2$  et  $s \geq 1$ . Toutes les constantes impliquées dans les  $\mathcal{O}$  dépendent implicitement de  $q$  et  $s$  et d'aucune autre quantité. On note  $S_q = \{q^m + iq^n \mid m, n \in \mathbb{N}\}$ . Dans la première partie de cet article, nous construisons une fonction entière  $f$  non polynomiale telle que  $f^{(\sigma)}(S_q) \subset \mathbb{Z}[i]$  pour tout  $\sigma \in \llbracket 0, s \llbracket$  et  $\overline{\lim}_{r \rightarrow +\infty} \frac{\ln |f|_r}{\ln^3 r} = \frac{4s}{27 \ln^2 |q|}$ . La seconde partie sera consacrée à la démonstration du fait qu'une fonction entière  $f$  telle que  $f^{(\sigma)}(S_q) \subset \mathbb{Z}[i]$  pour tout  $\sigma \in \llbracket 0, s \llbracket$  et  $\overline{\lim}_{r \rightarrow +\infty} \frac{\ln |f|_r}{\ln^3 r} < \frac{4s}{27 \ln^2 |q|}$  est polynomiale.

## 2. Développement en séries de Newton

Tout entier naturel  $n$  peut s'écrire sous la forme  $n = \lfloor \sqrt{n} \rfloor^2 + 2m + \varepsilon$  avec

$$(m, \varepsilon) = \begin{cases} \left( \frac{n - \lfloor \sqrt{n} \rfloor^2 - 1}{2}, 1 \right) & \text{si } n - \lfloor \sqrt{n} \rfloor^2 \text{ est impair} \\ \left( \frac{n - \lfloor \sqrt{n} \rfloor^2}{2}, 0 \right) & \text{sinon.} \end{cases}$$

Ainsi, il existe un couple  $(m, \varepsilon) \in \mathbb{N} \times \{0, 1\}$  avec  $0 \leq m \leq \lfloor \sqrt{n} \rfloor$  tel que

$$n = \lfloor \sqrt{n} \rfloor^2 + 2m + \varepsilon.$$

De plus, ce couple  $(m, \varepsilon)$  est facilement vu être unique sous les conditions requises. On peut alors définir une bijection de  $\mathbb{N}$  sur  $S_q$  de manière suivante : soit  $n \in \mathbb{N}$ , écrit sous la forme  $n = \lfloor \sqrt{n} \rfloor^2 + 2m + \varepsilon$  avec  $\varepsilon \in \{0, 1\}$ ,  $m \in \llbracket 0, \lfloor \sqrt{n} \rfloor \rrbracket$ . On pose

$$u_n = \begin{cases} q^{\lfloor \sqrt{n} \rfloor} + iq^m & \text{si } \varepsilon = 0 \\ q^m + iq^{\lfloor \sqrt{n} \rfloor} & \text{sinon.} \end{cases}$$

**Remarque 2.1.** L'application  $u : n \mapsto u_n$  est clairement bijective de bijection réciproque  $v : S_q \rightarrow \mathbb{N}$  définie par

$$v(q^l + iq^m) = \begin{cases} l^2 + 2m & \text{si } l \geq m \\ m^2 + 2l + 1 & \text{sinon.} \end{cases}$$

Nous commençons par lister quelques propriétés de la suite  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ .

**Lemme 2.2.** *La suite  $(|u_n|)_{n \in \mathbb{N}}$  est croissante.*

*Démonstration.* Soit  $n \in \mathbb{N}$ . On suppose que  $n \in \llbracket m^2, (m+1)^2 - 1 \rrbracket^2$ . Ecrivons  $n = m^2 + 2j + \varepsilon$  avec  $0 \leq j' \leq m$  et  $\varepsilon \in \{0, 1\}$ . Alors  $n + 1 = m^2 + 2j' + \varepsilon'$  avec  $0 \leq j \leq j' \leq m$  et  $\varepsilon' \in \{0, 1\}$ . Il vient que

$$|u_{n+1}|^2 - |u_n|^2 = (q^{2m} + q^{2j'}) - (q^{2m} + q^{2j}) \geq 0$$

Supposons que  $n = (m+1)^2 - 1$  avec  $m \in \mathbb{N}$ . On peut écrire  $n = m^2 + 2m$  et  $n + 1 = (m+1)^2$ . On constate que

$$|u_n|^2 \leq 2q^{2m} \leq q^{2(m+1)} + 1 = |u_{n+1}|^2.$$

□

**Lemme 2.3.** *Soit  $n \in \mathbb{N}$ . On a  $\log_{|q|} |u_n| = \sqrt{n} + \mathcal{O}(1)$ .*

*Démonstration.* Ecrivons  $n$  sous la forme  $n = l^2 + 2m + \varepsilon$  avec  $l = \lfloor \sqrt{n} \rfloor$ ,  $\varepsilon \in \{0, 1\}$  et  $m \in \llbracket 0, l \rrbracket$ . On a  $\ln |u_n| = \ln(\sqrt{|q|^{2l} + |q|^{2m}})$ . On en déduit que  $\frac{1}{2} \ln(q^{2l}) \leq \ln |u_n| \leq \frac{1}{2} \ln(2q^{2l})$ . Ainsi, on a  $l \ln |q| \leq \ln |u_n| \leq \frac{\ln 2}{2} + l \ln |q|$  et donc  $\ln |u_n| = l \ln |q| + \mathcal{O}(1)$ . Comme  $l = \sqrt{n} + \mathcal{O}(1)$ , le lemme est prouvé. □

**Lemme 2.4.** *Soit  $z \in \mathbb{C}$ . Il existe au plus quatre entiers naturels  $n$  tel que  $|z - u_n| < 1$ .*

*Démonstration.* Soient  $n_1$  et  $n_2$  deux entiers naturels tels que  $|z - u_{n_1}| < 1$  et  $|z - u_{n_2}| < 1$ . On a

$$|u_{n_1} - u_{n_2}| \leq |z - u_{n_1}| + |z - u_{n_2}| < 2.$$

Ecrivons  $u_{n_1} = q^a + iq^c$  et  $u_{n_2} = q^b + iq^d$  avec  $a, b, c, d \in \mathbb{N}$ . On a

$$|u_{n_1} - u_{n_2}|^2 = (q^a - q^b)^2 + (q^c - q^d)^2.$$

Ceci impose  $|q^a - q^b| \leq 1$  et  $|q^c - q^d| \leq 1$ . Si  $q \geq 3$ , on en déduit les égalités  $a = b$  et  $c = d$ . Si  $|q| = 2$ , on a  $a, b, c, d \in \{0, 1\}$ . Le lemme s'ensuit.  $\square$

**Remarque 2.5.** Dans le cas  $q = 2$ , on ne peut pas en général améliorer la borne 4. En effet, pour  $z = \frac{3}{2} + \frac{3}{2}i$ , on a

$$|z - (1 + i)| = |z - (1 + 2i)| = |z - (2 + i)| = |z - (2 + 2i)| = \frac{\sqrt{2}}{2}.$$

**Lemme 2.6.** Soit  $y \in [1, +\infty[$ . On a

$$\max\{j \in \mathbb{N} \mid |u_j| \leq y\} = \log_{|q|}^2 y + \mathcal{O}(\log_{|q|} y).$$

*Démonstration.* Soit  $j = [\log_{|q|} y]^2 - 1$ . On a

$$|u_j| = \sqrt{2q^{2([\log_{|q|} y]-1)}} = \sqrt{2}|q|^{[\log_{|q|} y]-1} \leq |q|^{\log_{|q|} y} \leq y.$$

Soit  $j = ([\log_{|q|} y] + 1)^2$ . On a

$$|u_j| = \sqrt{q^2 \sqrt{j} + 1} \geq |q|^{[\log_{|q|} y]+1} \geq |q|^{\log_{|q|} y} \geq y.$$

Ainsi, on a

$$[\log_{|q|} y]^2 - 1 \leq \max\{j \in \mathbb{N} \mid |u_j| \leq y\} \leq ([\log_{|q|} y] + 1)^2$$

et le lemme en découle.  $\square$

**Notations.** Rappelons que  $q$  et  $s$  sont deux entiers tels que  $|q| \geq 2$  et  $s \geq 1$ . Pour tout  $n \in \mathbb{N}$  ( $n = ls + r$  avec  $l \in \mathbb{N}$  et  $r \in \llbracket 0, s \rrbracket$ ), on pose

$$P_{n,s}(X) = (X - u_l)^r \prod_{i=0}^{l-1} (X - u_i)^s.$$

Pour tout  $z \in \mathbb{C}$ , on note  $P_{n,s}^*(z)$  le produit  $P_{n,s}(z)$  privé des facteurs  $z - u_i$  de norme strictement plus petite que 1. D'après le lemme 2.4, il existe au plus  $4s$  tels facteurs.

Une somme primée  $\sum'_i$  ne porte que sur les termes tels que  $|z - u_i| \geq 1$ .

**Lemme 2.7.** Soit  $\theta \in \mathbb{R}^+$  et  $z \in \mathbb{C}$  de norme  $|u_{[n/s]}|^\theta$ . On a

$$\log_{|q|} |P_{n,s}^*(z)| = w(\theta) \frac{n^{\frac{3}{2}}}{\sqrt{s}} + \mathcal{O}(n),$$

où  $w(\theta) = \theta$  si  $\theta \geq 1$  et  $w(\theta) = \frac{\theta^3 + 2}{3}$  si  $\theta \leq 1$ .

**Remarque 2.8.** Insistons sur le fait que dans ce lemme et dans la proposition suivante, comme dans tout cet article, les constantes impliquées dans les  $\mathcal{O}$  ne dépendent que de  $q$  et  $s$ .

*Démonstration.* Ecrivons la division euclidienne de  $n$  par  $s$  :  $n = ls + r$ ,  $l \in \mathbb{N}$ ,  $r \in \llbracket 0, s \rrbracket$ . Supposons que  $\theta > 1$ . On a pour tout  $k \in \llbracket 0, l \rrbracket$ ,  $|z| > |u_k|$ . La croissance de la suite  $(|u_n|)_{n \in \mathbb{N}}$  et les inégalités

$$\begin{aligned} \sum_{i=0}^{r-1} \ln(|z| - |u_i|) + s \sum_{i=0}^{l-1} \ln(|z| - |u_i|) \\ \leq \ln |P_{n,s}^*(z)| \leq \sum_{i=0}^{r-1} \ln(|z| + |u_i|) + s \sum_{i=0}^{l-1} \ln(|z| + |u_i|) \end{aligned}$$

impliquent que

$$(n - 4s) \ln(|z| - |u_l|) \leq \ln |P_{n,s}^*(z)| \leq n \ln(2|z|).$$

Puisque  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{|z|}{|u_{\lfloor n/s \rfloor}|} = +\infty$ , on a  $|z| - |u_l| \geq \frac{|z|}{2}$  pour tout  $n$  assez grand. On en déduit que  $|\ln |P_{n,s}^*(z)| - n \ln |z|| \leq n \ln 2 + 4s \log_{|q|} |z|$ . Comme  $\log_{|q|} |z| = \theta \sqrt{\frac{n}{s}} + \mathcal{O}(1)$ , on obtient que

$$\log_{|q|} |P_{n,s}^*(z)| = \frac{\theta}{\sqrt{s}} n^{3/2} + \mathcal{O}(n).$$

Si  $0 \leq \theta \leq 1$ , on pose  $j_0 = \max\{j \in \mathbb{N} \mid |u_j| < |u_{\lfloor n/s \rfloor}|^\theta\}$  et  $j_1 = \lceil \sqrt{j_0} \rceil$ . Le lemme 2.6 implique que  $j_0 = n \frac{\theta^2}{s} + \mathcal{O}(\sqrt{n})$ . On a

$$\sum_{i=0}^{j_1^2-1} \ln(|z| - |u_0|) \leq \sum_{i=0}^{j_1^2-1} \ln |z - u_i| \leq \sum_{i=0}^{j_1^2-1} \ln(2|z|).$$

Comme  $|z| - |u_0| \geq |z|/2$  pour  $n$  assez grand, on obtient

$$\sum_{i=0}^{j_1^2-1} \log_{|q|} |z - u_i| = j_1^2 (\log_{|q|} |z| + \mathcal{O}(1)) = \theta^3 \left(\frac{n}{s}\right)^{3/2} + \mathcal{O}(n).$$

Puisque pour tout  $i \in \llbracket j_1^2, (j_1 + 1)^2 \rrbracket$  tel que  $|z - u_i| \geq 1$  on a

$$\begin{aligned} 0 \leq \ln |z - u_i| &\leq \ln(|z| + |u_i|) \leq \ln 2 + \max(\ln |z|, \ln |u_i|) \\ &\leq \ln 2 + \ln |u_{(j_1+1)^2}|, \end{aligned}$$

il en résulte que

$$\begin{aligned} \left| \sum_{i=j_1^2}^{(j_1+1)^2-1} \log_{|q|} |z - u_i| \right| &\leq (2j_1 + 1) (\log_{|q|} 2 + \log_{|q|} |u_{(j_1+1)^2}|) \\ &\leq (2\sqrt{j_1} + 1) (\log_{|q|} 2 + (j_1 + 1) + \mathcal{O}(1)) = \mathcal{O}(n). \end{aligned}$$

On a

$$\sum'_{j=(j_1+2)^2}^{l-1} \ln |z - u_j| \leq \sum'_{j=(j_1+1)^2}^{l-1} \ln |z - u_j| \leq \sum'_{j=(j_1+1)^2}^{l-1} \ln |2u_j|.$$

Soit  $j \geq (j_1 + 2)^2$ . On a

$$\left| \frac{z}{u_j} \right| \leq \left| \frac{u_{(j_1+1)^2}}{u_{(j_1+2)^2}} \right| \leq \sqrt{\frac{|q|^{2(j_1+1)} + 1}{|q|^{2(j_1+2)} + 1}} \leq \frac{1}{\sqrt{2}},$$

puis

$$\log_{|q|} |z - u_j| = \log_{|q|} |u_j| + \ln \left( 1 - \left| \frac{z}{u_j} \right| \right) \geq \log_{|q|} |u_j| + \ln \left( 1 - \frac{1}{\sqrt{2}} \right).$$

Par l'égalité

$$(2.1) \quad \sum_{j=0}^n \sqrt{j} = \frac{2}{3} n^{3/2} + \mathcal{O}(n),$$

on a

$$\sum'_{j=(j_1+1)^2}^{l-1} \log_{|q|} |u_j| = \sum'_{j=(j_1+1)^2}^{l-1} (\sqrt{j} + \mathcal{O}(1)) = \frac{2}{3} \left( \frac{n}{s} \right)^{3/2} (1 - \theta^3) + \mathcal{O}(n)$$

$$\text{et } \sum'_{j=(j_1+2)^2}^{l-1} \log_{|q|} |u_j| = \sum'_{j=(j_1+2)^2}^{l-1} (\sqrt{j} + \mathcal{O}(1)) = \frac{2}{3} \left( \frac{n}{s} \right)^{3/2} (1 - \theta^3) + \mathcal{O}(n).$$

Ainsi, en remarquant que

$$\sum'_{j=(j_1+1)^2}^{l-1} \log_{|q|} 2 = \mathcal{O}(n) \quad \text{et} \quad \sum'_{j=(j_1+1)^2}^{l-1} \log_{|q|} \left( 1 - \frac{1}{\sqrt{2}} \right) = \mathcal{O}(n),$$

on obtient que

$$\sum'_{j=(j_1+1)^2}^{l-1} \log_{|q|} |z - u_j| = \frac{2}{3} \left( \frac{n}{s} \right)^{3/2} (1 - \theta^3) + \mathcal{O}(n).$$

Enfin, d'après les inégalités

$$0 \leq \sum'_{i=0}^{r-1} \log_{|q|} |z - u_i| \leq r \log_{|q|} (|z| + |u_i|) \leq r \log_{|q|} (2|u_i|)$$



on a  $\sum_{i=0}^{r-1} \log_{|q|} |z - u_i| = \mathcal{O}(\sqrt{n})$ . Finalement, on conclut que

$$\begin{aligned} \log_{|q|} |P_{n,s}^*(z)| &= s(\theta^3 \left(\frac{n}{s}\right)^{3/2} + \frac{2}{3} \left(\frac{n}{s}\right)^{3/2} (1 - \theta^3)) + \mathcal{O}(n) \\ &= \frac{\theta^3 + 2}{3\sqrt{s}} n^{3/2} + \mathcal{O}(n). \end{aligned} \quad \square$$

**Proposition 2.9.** Soit  $\theta \in \mathbb{R}^+$  et  $n \in \mathbb{N}$ . On a

$$\log_{|q|} |P_{n,s}|_{|u_{[n/s]}|^\theta} = w(\theta) \frac{n^{\frac{3}{2}}}{\sqrt{s}} + \mathcal{O}(n),$$

où  $w(\theta) = \theta$  si  $\theta \geq 1$  et  $w(\theta) = \frac{\theta^3+2}{3}$  si  $\theta \leq 1$ .

*Démonstration.* Soit  $a, b$  deux réels positifs,  $\varphi \in [\pi, \frac{3\pi}{2}]$  et  $\varphi' \in [-\frac{\pi}{2}, \pi]$ . On a

$$(2.2) \quad a \cos \varphi + b \sin \varphi \leq a \cos \varphi' + b \sin \varphi'.$$

Notons  $z_0 = |u_{[n/s]}|^\theta e^{i\varphi}$  et  $z = |u_{[n/s]}|^\theta e^{i\varphi'}$ . Par l'inégalité (2.2), pour tout  $j \in \llbracket 0, [n/s] \rrbracket$ , on a  $|z_0 - u_j| \geq |z - u_j|$ . On en déduit que  $|P_{n,s}|_{|u_{[n/s]}|^\theta}$  est atteint en un nombre complexe  $Z = |u_{[n/s]}|^\theta e^{i\psi}$  avec  $\psi \in [\pi, \frac{3\pi}{2}]$ . Soit  $j \in \llbracket 0, [n/s] \rrbracket$ . Il existe deux réels positifs  $\alpha$  et  $\beta$  tels que  $u_j = \alpha + i\beta$ . Alors,

$$\begin{aligned} |Z - u_j|^2 &= (Z - u_j)(\bar{Z} - \bar{u}_j) = |Z|^2 + |u_j|^2 - (\bar{Z}u_j + Z\bar{u}_j) \\ &= |Z|^2 + |u_j|^2 - |u_{[n/s]}|^\theta (\alpha \cos \psi + \beta \sin \psi) \geq |u_j|^2 \geq 1. \end{aligned}$$

Donc  $\log_{|q|} |P_{n,s}|_{|u_{[n/s]}|^\theta} = \log_{|q|} |P_{n,s}(Z)| = \log_{|q|} |P_{n,s}^*(Z)|$ . □

**Notations.** Pour une fonction entière  $f$ , on note  $\tau_f$  l'élément de  $\mathbb{R} \cup \{+\infty\}$  défini par  $\tau_f := \overline{\lim}_{r \rightarrow +\infty} \frac{\log_{|q|} |f|_r}{\log_{|q|}^3 r}$ .

**Théorème 2.10.** Soit  $f$  une fonction entière sur  $\mathbb{C}$  telle que  $\tau_f < \frac{s}{3}$  et  $f^{(\sigma)}(S_q) = \{0\}$  pour tout  $\sigma \in \llbracket 0, s \llbracket$ . Alors,  $f$  est la fonction nulle. De plus, la borne  $\frac{s}{3}$  est optimale.

*Démonstration.* Supposons que  $f$  ne soit pas identiquement nulle. La fonction  $F(z) := \frac{f(z)}{z_{\text{ord}_{-1}(f)}}$  est entière sur  $\mathbb{C}$ , vérifie  $F(-1) \neq 0$  et on a  $\tau_F = \tau_f$ . Soit  $N$  un entier suffisamment grand et notons  $G$  la fonction entière sur  $\mathbb{C}$  définie par  $G(z) = \frac{F(z)}{P_{N^2s,s}(z)}$ . Soit  $\tau$  un réel tel que  $\tau_f < \tau < \frac{s}{3}$ . Il existe  $B \in \mathbb{R}^+$  tel que pour tout  $r \in \mathbb{R}$  et tout  $z \in \mathbb{C}$  vérifiant  $|z| = r$ , on ait  $\log_{|q|} |f(z)| \leq \tau \log_{|q|}^3 r + B$ . Soit  $z_0 \in \mathbb{C}$  tel que  $|z_0| = |u_{N^2}|$  et  $|G|_{|u_{N^2}|} = |G(z_0)|$ . Pour tout  $j \in \llbracket 0, N^2 \rrbracket$ , on a  $|u_j| \leq \sqrt{2}|q|^{N-1}$  et

$$|z_0 - u_j| \geq |z_0| - |u_j| \geq \sqrt{|q|^{2N} + 1} - \sqrt{2}|q|^{N-1} \geq |q|^N - \sqrt{2}|q|^{N-1} \geq 1.$$

D'après le lemme 2.7 (prendre  $\theta = 1$ ),

$$\log_{|q|} |P_{N^2s,s}(z_0)| = \log_{|q|} |P_{N^2s,s}^*(z_0)| = sN^3 + \mathcal{O}(N^2).$$

Le principe du maximum  $|G(-1)| \leq |G|_{|u_{N^2}|}$  implique que

$$\log_{|q|} |G(-1)| \leq \tau N^3 - sN^3 + \mathcal{O}(N^2).$$

Comme  $\log_{|q|} |P_{N^2s,s}(-1)| = \log_{|q|} |P_{N^2s,s}^*(-1)|$ , en appliquant de nouveau le lemme 2.7, avec  $\theta = 0$ , on obtient que

$$\log_{|q|} |F(-1)| \leq \tau N^3 - sN^3 + \frac{2}{3}sN^3 + \mathcal{O}(N^2) \leq \left(\tau - \frac{s}{3}\right) N^3 + \mathcal{O}(N^2).$$

On en déduit l'inégalité  $\tau \geq \frac{s}{3}$ . Cette contradiction montre que  $F$  est identiquement nulle sur  $\mathbb{C}$ . L'optimalité de la borne est obtenue grâce à la proposition suivante.  $\square$

**Proposition 2.11.** *Le produit de Weierstrass  $W_{q,s}(z) := \prod_{n \in \mathbb{N}} (1 - \frac{z}{u_n})^s$  définit une fonction entière sur  $\mathbb{C}$  telle que  $W_{q,s}^{(\sigma)}(S_q) = \{0\}$  pour tout  $\sigma \in \llbracket 0, s \rrbracket$  et  $\tau_{W_{q,s}} = \frac{s}{3}$ .*

*Démonstration.* La série  $\sum_{n \geq 0} \frac{z}{u_n}$  converge normalement sur tout compact de  $\mathbb{C}$ . On en déduit (voir [2]) que  $W_{q,s}$  est une fonction entière sur  $\mathbb{C}$ . Pour tout  $\sigma \in \llbracket 0, s \rrbracket$ , on a  $W_{q,s}^{(\sigma)}(S_q) = \{0\}$ . Pour estimer la croissance de  $W_{q,s}$ , il suffit de considérer le cas  $s = 1$ . Soit  $r \in \mathbb{R}^+$ ,  $z \in \mathbb{C}$  tel que  $|z| = r$ ,  $N_1 = \max\{n \in \mathbb{N} \mid |u_n| \leq |z|\}$ ,  $N_2 = (\lfloor \sqrt{N_1} \rfloor + 1)^2$  et  $N$  un entier supérieur à  $N_2$ . On a

$$\begin{aligned} \ln \left| \prod_{i=0}^{N^2-1} \left(1 - \frac{z}{u_i}\right) \right| &= \ln |P_{N^2,1}(z)| - \sum_{i=0}^{N^2-1} \ln |u_i| \\ &= \ln |P_{N^2,1}(z)| + \sum_{k=N_2}^{N^2-1} \ln \left|1 - \frac{z}{u_k}\right| - \sum_{k=0}^{N_2-1} \ln |u_k|. \end{aligned}$$

Soit  $m$  un entier supérieur à  $\sqrt{N_2}$ . Pour tout  $k \in \llbracket m^2, (m+1)^2 \rrbracket$ , une récurrence immédiate donne  $|\frac{z}{u_k}| \leq \frac{|u_{N_2}|}{|u_{m^2}|} \leq (\frac{1}{\sqrt{2}})^{m-\sqrt{N_2}}$ . On obtient alors

$$\sum_{k=N_2}^{N^2-1} \ln \left(1 - \left|\frac{z}{u_k}\right|\right) \leq \sum_{k=N_2}^{N^2-1} \ln \left|1 - \frac{z}{u_k}\right| \leq \sum_{k=N_2}^{N^2-1} \ln \left(1 + \left|\frac{z}{u_k}\right|\right),$$

c'est-à-dire

$$\begin{aligned}
 \sum_{l=\sqrt{N_2}}^{N-1} \sum_{k=l^2}^{(l+1)^2-1} \ln \left( 1 - \left| \frac{z}{u_k} \right| \right) &\leq \sum_{k=N_2}^{N^2-1} \ln \left| 1 - \frac{z}{u_k} \right| \\
 &\leq \sum_{l=\sqrt{N_2}}^{N-1} \sum_{k=l^2}^{(l+1)^2-1} \ln \left( 1 + \left| \frac{z}{u_k} \right| \right), \\
 \sum_{l=\sqrt{N_2}}^{N-1} (2l+1) \ln \left( 1 - \frac{1}{(\sqrt{2})^{l-\sqrt{N_2}}} \right) &\leq \sum_{k=N_2}^{N^2-1} \ln \left| 1 - \frac{z}{u_k} \right| \\
 &\leq \sum_{l=\sqrt{N_2}}^{N-1} (2l+1) \ln \left( 1 + \frac{1}{(\sqrt{2})^{l-\sqrt{N_2}}} \right).
 \end{aligned}$$

De la convergence des séries

$$\sum_{l \geq 0} (2l+1) \ln \left( 1 - \frac{1}{(\sqrt{2})^{l-\sqrt{N_2}}} \right) \quad \text{et} \quad \sum_{l \geq 0} (2l+1) \ln \left( 1 + \frac{1}{(\sqrt{2})^{l-\sqrt{N_2}}} \right),$$

il s'ensuit que

$$\begin{aligned}
 \sum_{l=0}^{+\infty} (2(l + \sqrt{N_2}) + 1) \ln(1 - 2^{-l/2}) \\
 \leq \sum_{k=N_2}^{N^2-1} \ln \left| 1 - \frac{z}{u_k} \right| \leq \sum_{l=0}^{+\infty} (2(l + \sqrt{N_2}) + 1) \ln(1 + 2^{-l/2}).
 \end{aligned}$$

Les séries  $\sum_{l \geq 0} l \ln(1 - 2^{-l/2})$ ,  $\sum_{l \geq 0} \ln(1 - 2^{-l/2})$ ,  $\sum_{l \geq 0} l \ln(1 + 2^{-l/2})$  et  $\sum_{l \geq 0} \ln(1 + 2^{-l/2})$  étant convergentes, il existe des réels  $\alpha, \beta, \gamma, \delta$  tels que

$$\alpha \sqrt{N_2} + \beta \leq \sum_{k=N_2}^{N^2-1} \ln \left| 1 - \frac{z}{u_k} \right| \leq \gamma \sqrt{N_2} + \delta.$$

D'après le lemme 2.6,  $\sqrt{N_2} = o(\log_{|q|}^3 r)$ , ce qui implique que

$$\sum_{k=N_2}^{N^2-1} \ln \left| 1 - \frac{z}{u_k} \right| = o(\log_{|q|}^3 r).$$

On déduit de la proposition 2.9 (prendre  $\theta = \frac{\log_{|q|} r}{\log_{|q|} |u_{N_2}|}$ ) et de l'égalité (2.1) que

$$\begin{aligned} \log_{|q|} |P_{N_2,1}(z)| - \sum_{k=0}^{N_2-1} \log_{|q|} |u_k| &= \frac{\left(\frac{\log_{|q|} r}{\log_{|q|} |u_{N_2}|}\right)^3 + 2}{3} N_2^{3/2} - \frac{2}{3} N_2^{3/2} + \mathcal{O}(N_2) \\ &= \frac{1}{3} \log_{|q|}^3 r + o(\log_{|q|}^3 r). \end{aligned}$$

Par passage à la limite  $N \rightarrow +\infty$ , on vient que  $\log_{|q|} |W_{q,1}|_r = \frac{1}{3} \log_{|q|}^3 r + o(\log_{|q|}^3 r)$  et ainsi  $\overline{\lim}_{r \rightarrow +\infty} \frac{\log_{|q|} |W_{q,1}|_r}{\log_{|q|}^3 r} = \frac{1}{3}$ .  $\square$

**Remarque 2.12.** Cette proposition donne la croissance exacte de la fonction  $W_{q,s}$ . Dans [1], Bézivin n'obtient que la majoration  $\tau_{W,1} \leq \frac{2}{3}$ .

Le théorème suivant donne des conditions sous lesquelles une fonction entière sur  $\mathbb{C}$  est développable en série dans la base des polynômes  $P_{n,s}$  et explicite sa croissance en fonction de ses coefficients.

**Théorème 2.13.**

- (1) Si  $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$  est une suite de  $\mathbb{C}$  vérifiant  $\overline{\lim}_{n \rightarrow +\infty} \frac{\log_{|q|} |a_n|}{n^{3/2}} = \lambda < -\frac{2}{3\sqrt{s}}$ , alors la série  $\sum_{n \geq 0} a_n P_{n,s}(z)$  converge uniformément sur tout compact de  $\mathbb{C}$  vers une fonction entière  $f$  telle que

$$(*) \quad \overline{\lim}_{r \rightarrow +\infty} \frac{\log_{|q|} |f|_r}{\log_{|q|}^3 r} = \frac{4}{27\lambda^2}.$$

- (2) Soit  $f$  une fonction entière sur  $\mathbb{C}$  telle que  $\tau_f < \frac{s}{3}$ . Alors,  $f$  est développable en série de polynômes  $P_{n,s}$  : il existe une unique suite  $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$  de  $\mathbb{C}$  telle que pour tout  $z \in \mathbb{C}$ , on ait

$$f(z) = \sum_{n \geq 0} a_n P_{n,s}(z).$$

De plus, on a

$$(**) \quad \overline{\lim}_{n \rightarrow +\infty} \frac{\log_{|q|} |a_n|}{n^{3/2}} = -\frac{2\sqrt{3}}{9\sqrt{\tau_f}}$$

*Démonstration.* Par application de (1) et (2), il suffit de montrer que dans (\*) et (\*\*) on a seulement des majorations.

Soit  $\lambda < \lambda' < -\frac{2}{3\sqrt{s}}$  et soit  $\theta \in ]0, 1[$  tel que  $\lambda' + \frac{w(\theta)}{\sqrt{s}} < 0$ . Il existe  $n_1 \in \mathbb{N}$  tel que pour tout  $n \geq n_1$ , on ait  $\log_{|q|} |a_n| \leq \lambda' n^{\frac{3}{2}}$ . Pour tout  $R > 0$ , il existe un entier  $n_0 \geq n_1$  tel que  $|u_{[n_0/s]}|^\theta \geq R$ . La proposition 2.9 implique que

pour tout  $z \in \mathbb{C}$  de module inférieur à  $R$  et tout entier  $n \geq n_0$ ,

$$\begin{aligned} \log_{|q|} |a_n P_{n,s}(z)| &\leq \log_{|q|} |a_n P_{n,s}|_{|u_{[n_0/s]}|^\theta} \leq \log_{|q|} |a_n P_{n,s}|_{|u_{[n/s]}|^\theta} \\ &\leq \left( \lambda' + \frac{w(\theta)}{\sqrt{s}} \right) n^{\frac{3}{2}} + \mathcal{O}(n). \end{aligned}$$

La série  $\sum_{n \geq 0} a_n P_{n,s}(z)$  converge uniformément sur tout compact de  $\mathbb{C}$  vers une fonction entière  $f$ . Soit  $z \in \mathbb{C}$  de module  $r \geq |u_{[n_1/s]}|$ . On a

$$|f(z)| \leq \sum_{n=0}^{n_1-1} |a_n P_{n,s}(z)| + \sum_{\substack{n \geq n_1 \\ |u_{[n/s]}| \leq r}} |a_n P_{n,s}(z)| + \sum_{\substack{n \geq n_1 \\ |u_{[n/s]}| \geq r}} |a_n P_{n,s}(z)|.$$

La proposition 2.9 implique que

$$\sum_{\substack{n \geq n_1 \\ |u_{[n/s]}| \geq r}} |a_n P_{n,s}(z)| \leq \sum_{\substack{n \geq n_1 \\ |u_{[n/s]}| \geq r}} q^{\lambda' n^{3/2} + \frac{\left( \frac{\ln r}{3\sqrt{s}} \right)^3 + 2}{3\sqrt{s}} \times n^{3/2} + \mathcal{O}(n)}.$$

Comme  $\log_{|q|} |u_{[n/s]}| = \sqrt{n/s} + \mathcal{O}(1)$ , on a pour tout  $n \in \mathbb{N}$  tel que  $|u_{[n/s]}| \geq r$ ,

$$\frac{\left( \frac{\ln r}{3\sqrt{s}} \right)^3}{3\sqrt{s}} \times n^{3/2} = \left( \frac{s}{3} + \mathcal{O}\left( \frac{1}{\sqrt{n}} \right) \right) \log_{|q|}^3 r = \frac{s}{3} \log_{|q|}^3 r + \mathcal{O}(\log_{|q|}^2 r).$$

Il existe  $M \in \mathbb{R}^+$  tel que

$$\sum_{\substack{n \geq n_1 \\ |u_{[n/s]}| \geq r}} q^{\lambda' n^{3/2} + \frac{2}{3\sqrt{s}} n^{3/2} + \mathcal{O}(n)} \leq \sum_{\substack{n \geq n_1 \\ |u_{[n/s]}| \geq r}} q^{(\lambda' + \frac{2}{3\sqrt{s}}) n^{3/2} + Mn}.$$

La propriété [2, Chapitre III, 11.7.2] et le lemme 2.6 impliquent que

$$\begin{aligned} \sum_{\substack{n \geq n_1 \\ |u_{[n/s]}| \geq r}} q^{(\lambda' + \frac{2}{3\sqrt{s}}) n^{3/2} + Mn} \\ \underset{r \rightarrow +\infty}{\sim} q^{(\lambda' + \frac{2}{3\sqrt{s}})(s(\log_{|q|}^2 r + \mathcal{O}(\log_{|q|} r)))^{3/2} + Ms(\log_{|q|}^2 r + \mathcal{O}(\log_{|q|} r))} \\ \underset{r \rightarrow +\infty}{\sim} q^{(\lambda' s^{3/2} + \frac{2s}{3}) \log_{|q|}^3 r + \mathcal{O}(\log_{|q|}^2 r)}. \end{aligned}$$

Autrement dit, il existe une fonction  $r \mapsto \varepsilon(r)$  qui tend vers 0 en  $+\infty$  telle que

$$\sum_{\substack{n \geq n_1 \\ |u_{[n/s]}| \geq r}} q^{(\lambda' + \frac{2}{3\sqrt{s}}) n^{3/2} + Mn} = (1 + \varepsilon(r)) q^{(\lambda' s^{3/2} + \frac{2s}{3}) \log_{|q|}^3 r + \mathcal{O}(\log_{|q|}^2 r)}.$$

On en déduit que

$$\begin{aligned} & \log_{|q|} \left( \sum_{\substack{n \geq n_1 \\ |u_{[n/s]}| \geq r}} |a_n P_{n,s}(z)| \right) \\ & \leq \log_{|q|} (1 + \varepsilon(r)) + \left( \lambda' s^{3/2} + \frac{2s}{3} \right) \log_{|q|}^3 r + \frac{s}{3} \log_{|q|}^3 r + \mathcal{O}(\log_{|q|}^2 r) \\ & \leq (\lambda' s^{3/2} + s) \log_{|q|}^3 r + \mathcal{O}(\log_{|q|}^2 r). \end{aligned}$$

La fonction  $n \rightarrow \lambda' n^{3/2} + n \log_{|q|} r$  étant majorée par  $\frac{4}{27\lambda'^2} \log_{|q|}^3 r$ , on a

$$\begin{aligned} \sum_{\substack{n \geq n_1 \\ |u_{[n/s]}| \leq r}} |a_n P_{n,s}(z)| & \leq \sum_{\substack{n \geq n_1 \\ |u_{[n/s]}| \leq r}} q^{\left( \lambda' + \frac{\log_{|q|} r}{\sqrt{s} \log_{|q|} |u_{[n/s]}|} \right) n^{3/2} + \mathcal{O}(n)} \\ & \leq \sum_{\substack{n \geq n_1 \\ |u_{[n/s]}| \leq r}} q^{\lambda' n^{3/2} + n \log_{|q|} r + \mathcal{O}(\log_{|q|}^2 r)} \\ & \leq \sum_{\substack{n \geq n_1 \\ |u_{[n/s]}| \leq r}} q^{\frac{4}{27\lambda'^2} \log_{|q|}^3 r + \mathcal{O}(\log_{|q|}^2 r)} \end{aligned}$$

et par conséquent,

$$\log_{|q|} \left( \sum_{\substack{n \geq n_1 \\ |u_{[n/s]}| \leq r}} |a_n P_{n,s}(z)| \right) \leq \frac{4}{27\lambda'^2} \log_{|q|}^3 r + \mathcal{O}(\log_{|q|}^2 r).$$

Posons  $M_1 = \max_{0 \leq n \leq n_1} |a_n|$ . On a  $\sum_{n < n_1} |a_n P_{n,s}(z)| \leq n_1 M_1 (2r)^{n_1}$  et donc

$$\log_{|q|} \left( \sum_{n \leq n_1} |a_n P_{n,s}(z)| \right) = \mathcal{O}(\log_{|q|} r).$$

Comme  $\frac{4}{27\lambda'^2} - \lambda' s^{3/2} + s = \frac{-s^{3/2}}{\lambda'^2} (\lambda' + \frac{2}{3\sqrt{s}})^2 (\lambda' - \frac{1}{3\sqrt{s}})$ , on a  $\frac{4}{27\lambda'^2} \geq \lambda' s^{3/2} + s$ . On obtient que

$$\log_{|q|} |f|_r \leq \frac{4}{27\lambda'^2} \log_{|q|}^3 r + \mathcal{O}(\log_{|q|}^2 r) \quad \text{et} \quad \overline{\lim}_{r \rightarrow +\infty} \frac{\log_{|q|} |f|_r}{\log_{|q|}^3 r} \leq \frac{4}{27\lambda'^2}.$$

Montrons la deuxième partie du théorème. Soit  $\tau' \in \mathbb{R}$  tel que  $\tau < \tau' < \frac{s}{3}$  et  $\theta = \sqrt{\frac{s}{3\tau'}} > 1$ . Soit  $x \in \mathbb{C}$ ,  $n$  un entier suffisamment grand et

$l = [(n + 1)/s]$  tels que  $|u_l|^\theta > |x| + 1$ . La formule [5, (90)] implique que

$$f(x) = \sum_{k=0}^n a_k P_{k,s}(x) + R_n(x),$$

où, pour tout  $k \in \mathbb{N}$ ,

$$a_k = \frac{1}{2i\pi} \int_{\mathcal{C}} \frac{f(z)}{P_{k+1,s}(z)} dz \quad \text{et} \quad R_n(z) = \frac{P_{n+1,s}(x)}{2i\pi} \int_{\mathcal{C}} \frac{f(z)}{P_{n+1,s}(z)(x-z)} dz;$$

$\mathcal{C}$  désignant le cercle de centre  $O$  et de rayon  $|u_l|^\theta$ . Soit  $z_0 \in \mathbb{C}$  tel que  $|z_0| = |u_l|^\theta$  et  $|(\frac{f}{P_{n+1,s}})(z_0)| = |\frac{f}{P_{n+1,s}}|_{|u_l|^\theta}$ . Pour tout  $j \in \llbracket 0, l \rrbracket$ , on a

$$|z_0 - u_j| \geq |z_0| - |u_j| \geq |u_l|^\theta - |u_l| \geq |u_l|(|u_l|^{\theta-1} - 1) \geq 1$$

et  $\log_{|q|} |P_{n+1,s}(z_0)| = \log_{|q|} |P_{n+1,s}^*(z_0)|$ . En conséquence du lemme 2.7, on obtient que

$$\begin{aligned} \log_{|q|} |R_n(x)| &\leq \log_{|q|} |P_{n,s}(x)| + \tau'(\theta \log_{|q|} |u_l|)^3 \\ &\quad - \theta \frac{(n+1)^{3/2}}{\sqrt{s}} + \theta \log_{|q|} |u_l| + \mathcal{O}(n). \end{aligned}$$

On a  $\log_{|q|} |P_{n,s}(x)| \leq \log_{|q|} |P_{n,s}|_{|x|}$  et d'après la proposition 2.9 (prendre  $\theta = \frac{\log_{|q|} |x|}{\log_{|q|} |u_l|}$ ),

$$\log_{|q|} |P_{n,s}(x)| = \frac{\log_{|q|} |x|}{3\sqrt{s}} + 2n^{3/2} + \mathcal{O}(n).$$

Puisque  $\log_{|q|} |u_l| = \sqrt{\frac{n}{s}} + \mathcal{O}(1)$ , on en déduit que

$$\begin{aligned} \log_{|q|} |R_n(x)| &\leq \left( \frac{2}{3\sqrt{s}} + \tau' \frac{\theta^3}{s} - \theta \right) \frac{n^{3/2}}{\sqrt{s}} + \mathcal{O}(n) \\ &\leq \left( \frac{2}{3\sqrt{s}} - \frac{2\sqrt{3}}{9\sqrt{\tau'}} \right) n^{3/2} + \mathcal{O}(n). \end{aligned}$$

Comme  $\frac{2}{3\sqrt{s}} - \frac{2\sqrt{3}}{9\sqrt{\tau'}} < 0$ , il en résulte que  $\lim_{n \rightarrow +\infty} R_n(x) = 0$  et la série  $\sum_{n \geq 0} a_n P_{n,s}(x)$  converge vers  $f(x)$ . Majorons maintenant la croissance de  $f$ . Pour cela, majorons le module de  $a_n$ . Un calcul analogue à celui ci-dessus montre que

$$\begin{aligned} \log_{|q|} |a_n| &\leq \tau'(\theta \log_{|q|} |u_l|)^3 - \theta \frac{(n+1)^{3/2}}{\sqrt{s}} + \theta \log_{|q|} |u_l| + \mathcal{O}(n) \\ &\leq \left( \tau' \frac{\theta^3}{s} - \theta \right) \frac{n^{3/2}}{\sqrt{s}} + \mathcal{O}(n) \leq -\frac{2\sqrt{3}}{9\sqrt{\tau'}} n^{3/2} + \mathcal{O}(n). \end{aligned}$$

Par conséquent, on obtient que  $\overline{\lim}_{r \rightarrow +\infty} \frac{\log_{|q|} |a_n|}{n^{3/2}} \leq -\frac{2\sqrt{3}}{9\sqrt{\tau}}$ .  $\square$

**Remarque 2.14.** La borne  $\frac{s}{3}$  est optimale dans la deuxième partie du théorème. Ceci provient du fait que la fonction  $W_{q,s}$  n'est pas développable en série de polynômes  $P_{n,s}$ , puisque sa série de polynômes  $P_{n,s}$  associée est la série nulle. En effet, supposons qu'il existe une suite  $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$  de  $\mathbb{C}$  telle que pour tout  $z \in \mathbb{C}$ , on ait  $W_{q,s}(z) = \sum_{n \geq 0} a_n P_{n,s}(z)$ . Alors, on a  $W_{q,s}(u_0) = 0$  et  $a_0 = 0$ . Supposons avoir montré que  $a_0, \dots, a_{n-1}$  sont nuls. Ecrivons  $n = sl + j$  avec  $(l, j) \in \mathbb{N} \times \llbracket 0, s \rrbracket$ . D'après la formule de Leibniz, on a

$$W_{q,s}^{(j)}(u_l) = a_n P_{n,s}^{(j)}(u_l) = a_n j! P_{sl,s}(u_l) = 0$$

et  $a_n = 0$  puisque  $P_{sl,s}(u_l) \neq 0$ .

Le théorème ci-dessus permet de construire une fonction entière sur  $\mathbb{C}$  transcendante de croissance minimale à valeurs dans  $\mathbb{Z}[i]$  sur  $S_q$  ainsi que ses  $s$  premières dérivées.

**Théorème 2.15.** *Il existe une fonction  $f$  entière sur  $\mathbb{C}$  telle que  $\tau_f = \frac{4s}{27}$  et  $f^{(\sigma)}(S_q) \subset \mathbb{Z}[i]$  pour tout  $\sigma \in \llbracket 0, s \rrbracket$ .*

*Démonstration.* On définit une suite  $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$  de nombres complexes de manière suivante : on pose  $a_0 = 1$ . Supposons avoir construit  $a_0, \dots, a_{n-1}$ . Ecrivons  $n = ls + j$  avec  $(l, j) \in \mathbb{N} \times \llbracket 0, s \rrbracket$ . Il existe  $R_n \in \mathbb{Z}[i]$  et  $F_n \in \mathbb{C}$  avec  $|F_n| < 1$  tels que  $\sum_{k=0}^{n-1} a_k P_{k,s}^{(j)}(u_l) = R_n + F_n$ . Il existe un élément  $z$  de  $\{\pm 1, \pm i\}$  tels que  $1 \leq |F_n - z| \leq 2$ . On choisit alors  $a_n$  de sorte que  $a_n P_{n,s}^{(j)}(u_l) + F_n = z$ . Comme  $P_{n,s}^{(j)}(u_l) = j! P_{sl,s}(u_l)$ , on déduit de la proposition 2.9 que  $\log_{|q|} |a_n| = -\frac{n^{3/2}}{\sqrt{s}} + \mathcal{O}(n)$ . La première partie du théorème 2.13 implique que la série  $\sum_{n \geq 0} a_n P_{n,s}(z)$  définit une fonction entière  $f$  sur  $\mathbb{C}$  telle que  $\tau_f = \frac{4s}{27}$ . Par construction,  $f^{(\sigma)}(u_n)$  est un élément de  $\mathbb{Z}[i]$  pour tout  $(n, \sigma) \in \mathbb{N} \times \llbracket 0, s \rrbracket$ .  $\square$

**Remarque 2.16.** Il existe en fait au moins deux éléments  $z_1, z_2$  de  $\{\pm 1, \pm i\}$  tels que  $1 \leq |F_n - z_i| \leq 2$  ( $i \in \{1, 2\}$ ). Ainsi, pour tout  $n \in \mathbb{N}$ , il existe au moins deux choix distincts possibles pour  $a_n$ . Ceci montre qu'il existe une infinité non dénombrable de fonctions  $f$  entières sur  $\mathbb{C}$  telles que  $\tau_f = \frac{4s}{27}$  et  $f^{(\sigma)}(S_q) \subset \mathbb{Z}[i]$  pour tout  $\sigma \in \llbracket 0, s \rrbracket$ .

### 3. Amélioration du théorème de Bézivin

Pour montrer qu'une fonction entière sur  $\mathbb{C}$  qui prend des valeurs entières de Gauss sur  $S_q$  de faible croissance est un polynôme, on suit la stratégie mise en place par Bézivin. On commence par montrer qu'elle vérifie une équations aux  $q$ -différences à coefficients polynomiaux. Cela permet de majorer la croissance de  $f$ . Ceci permet de montrer que  $f$  est algébrique sur  $\mathbb{C}(z)$  et donc est polynomiale.



**Lemme 3.1.** *Soit  $f$  une fonction entière sur  $\mathbb{C}$  telle que  $\tau_f$  est fini. Pour tout réel  $\tau'$  tel que  $\tau_f < \tau'$ , il existe  $B \in \mathbb{R}$  tel que pour tout  $\sigma \in \llbracket 0, s \llbracket$  et pour tout  $r \in \mathbb{R}$ ,  $\log_{|q|} |f^{(\sigma)}|_r \leq \tau' \log_{|q|}^3 r + B$ .*

*Démonstration.* Il existe  $C \in \mathbb{R}$  tel que pour tout  $r > 0$ , on ait  $\log_{|q|} |f|_r \leq \tau' \log_{|q|}^3 r + C$ . Soit  $z_0 \in \mathbb{C}$  de module  $r$ . Par la formule de Cauchy, on a

$$f^{(\sigma)}(z_0) = \frac{\sigma!}{2i\pi} \int_{\mathcal{C}} \frac{f(z)}{(z - z_0)^{\sigma+1}} dz,$$

où  $\mathcal{C}$  est le cercle de centre  $z_0$  et de rayon 1. On en déduit que

$$|f(z_0)| \leq \sigma! q^{\tau' \log_{|q|}^3 (r+1) + C}.$$

Comme  $\log_{|q|}^3 (r + 1) = \log_{|q|}^3 r + \mathcal{O}(1)$ , le lemme est prouvé. □

**Théorème 3.2.** *Soit  $f$  une fonction entière sur  $\mathbb{C}$  telle que  $\tau_f < \frac{4s}{27}$  et  $f^{(\sigma)}(S_q) \subset \mathbb{Z}[i]$  pour tout  $\sigma \in \llbracket 0, s \llbracket$ . Alors,  $f$  est solution d'une équation aux  $q$ -différences*

$$\sum_{i=0}^l P_i(z) f(q^i z) = 0,$$

où  $l$  est un entier naturel non nul et les  $P_i$  sont des polynômes de  $\mathbb{C}[z]$  non tous nuls.

*Démonstration.* Soit  $\tau'$  un réel tel que  $\tau_f < \tau' < \frac{4s}{27}$ . Pour tout  $z \in \mathbb{C}$ , on a  $\log_{|q|} |f(z)| \leq \tau' \log_{|q|}^3 |z| + \mathcal{O}(1)$ . Soit  $N$  un entier que l'on choisira assez grand. On pose  $K_N = \lceil N^{5/3} \rceil$  et  $L = \lceil N^{2/3} \rceil$ . Pour tout  $(k, l, m, \sigma) \in \llbracket 0, K_N \llbracket \times \llbracket 0, L_N \llbracket \times \llbracket 0, N^2 \llbracket \times \llbracket 0, s \llbracket$ , on a

$$\begin{aligned} \left| \left( z^k f(q^l z) \right)^{(\sigma)}(u_m) \right| &= \left| \sum_{j=0}^{\sigma} \binom{\sigma}{j} \frac{k!}{(k-j)!} u_m^{k-j} q^{l(\sigma-j)} f^{(\sigma-j)}(q^l u_m) \right| \\ &\leq k! 2^{\sigma} |u_m|^k |q|^{l\sigma + \tau' \log_{|q|}^3 (q^l |u_m|) + \mathcal{O}(1)} \\ &\leq K_N! 2^s |q|^{K_N(\sqrt{N^2-1} + \mathcal{O}(1))} \\ &\quad \times |q|^{L_N s + \tau' \log_{|q|}^3 (|q|^{L_N} \times q^{\sqrt{N^2-1} + \mathcal{O}(1)}) + \mathcal{O}(1)}, \end{aligned}$$

la dernière inégalité résultant du lemme 3.1. La majoration triviale  $K_N! \leq K_N^{K_N}$  implique que

$$\left| \left( z^k f(q^l z) \right)^{(\sigma)}(u_m) \right| \leq q^{\tau' N^3 + o(N^3)}.$$

D'après le lemme de Siegel (voir [11, Lemme 1.3.1]), si  $K_N L_N > 2sN^2$ , il existe  $K_N L_N$  entiers  $a_{kl}$  ( $k \in \llbracket 0, K_N \llbracket$ ,  $l \in \llbracket 0, L_N \llbracket$ ) tels que  $\log_{|q|} |a_{kl}| \leq B_N$

et  $g^{(\sigma)}(u_m) = 0$  pour tous  $\sigma \in \llbracket 0, s \llbracket$  et  $m \in \llbracket 0, N^2 \llbracket$ , où l'a posé

$$B_N = \frac{2sN^2}{K_N L_N - 2sN^2} (\tau' N^3 + o(N^3)) \text{ et } g(z) = \sum_{k=0}^{K_N-1} \sum_{l=0}^{L_N-1} a_{kl} z^k f(q^l z).$$

Supposons qu'il existe deux entiers  $M \geq N^2$  et  $\sigma \in \llbracket 0, s \llbracket$  tels que  $g^{(\sigma)}(u_M) \neq 0$ . On considère le couple  $(M, \sigma)$  minimal pour l'ordre lexicographique. Puisque la fonction  $\frac{g(z)}{\prod_{i=0}^{M-1} (z-u_i)^s}$  est entière sur  $\mathbb{C}$ , le théorème des résidus implique par minimalité de  $\sigma$  que

$$g^{(\sigma)}(u_M) = \sigma! \frac{\prod_{i=0}^{M-1} (u_M - u_i)^s}{2\pi i} \int_{\mathcal{C}} \frac{g(z)}{(z - u_M)^{\sigma+1} \prod_{i=0}^{M-1} (z - u_i)^s} dz,$$

où  $\mathcal{C}$  désigne le cercle de centre 0 et de rayon  $|u_M|^{3/2}$ . Soit  $z \in \mathbb{C}$  de module  $|u_M|^{3/2}$ . On a

$$|g(z)| \leq K_N L_N |q|^{B_n} |u_M|^{\frac{3}{2} K_N} |q|^{\tau' \log_{|q|} (|q|^{L_N} |u_M|^{3/2}) + \mathcal{O}(1)}.$$

Comme  $B_N \sim_{N \rightarrow +\infty} N^{8/3}$ ,  $K_N L_N \sim_{N \rightarrow +\infty} N^{7/3}$ , on obtient que

$$\begin{aligned} \log_{|q|} (|g(z)|) &\leq \log_{|q|} (N^{7/3} + o(N^{7/3})) + N^{8/3} + o(N^{8/3}) + \frac{3}{2} N^{5/3} \sqrt{N} + \dots \\ &\quad + \tau' \left( N^{2/3} + \frac{3}{2} \sqrt{M} + \mathcal{O}(1) \right)^3 \\ &\leq \log_{|q|} (M^{7/6}) + M^{4/3} + \frac{3}{2} M^{13/12} + \tau' \left( M^{1/3} + \frac{3}{2} \sqrt{M} \right)^3 + o(M^{3/2}). \end{aligned}$$

Par conséquent, on en conclut que

$$\log_{|q|} (|g|_{|u_M|^{3/2}}) \leq \frac{27}{8} \tau' M^{3/2} + o(M^{3/2}).$$

Soit  $z_0 \in \mathbb{C}$  de module  $|u_M|^{3/2}$  tel que

$$\left| \frac{g(z)}{(z - u_M)^{\sigma+1} \prod_{i=0}^{M-1} (z - u_i)^s} \right|_{|u_M|^{3/2}} = \left| \frac{g(z_0)}{(z_0 - u_M)^{\sigma+1} \prod_{i=0}^{M-1} (z_0 - u_i)^s} \right|.$$

Pour tout  $j \in \llbracket 0, M \llbracket$ , on a

$$|z_0 - u_j| \geq |z_0| - |u_j| \geq |u_M|^{3/2} - |u_{M-1}| \geq |u_M|^{3/2} - |u_M| \geq 1.$$

D'après le lemme 2.7,  $\log_{|q|} |P_{M,1}(z_0)| = \log_{|q|} |P_{M,1}^*(z_0)| = \frac{3}{2} M^{3/2} + \mathcal{O}(M)$ .

La proposition 2.9 implique que  $\log_{|q|} |P_{M,1}(u_M)| \leq M^{3/2} + \mathcal{O}(M)$ . Ceci entraîne que

$$\log_{|q|} |g^{(\sigma)}(u_M)| \leq \left( \frac{27}{8} \tau' - \frac{s}{2} \right) M^{3/2} + o(M^{3/2}).$$

Comme  $\frac{27}{8}\tau' - \frac{s}{2} < 0$ , pour  $M$  assez grand, c'est-à-dire  $N$  assez grand, on a  $|g^{(\sigma)}(u_M)| < 1$ . Puisque  $g^{(\sigma)}(u_M) \in \mathbb{Z}[i]$ , on en déduit que  $g^{(\sigma)}(u_M) = 0$ . Cette contradiction montre que pour tout  $m \in \mathbb{N}$  et tout  $\sigma \in \llbracket 0, s \rrbracket$ , on a  $g^{(\sigma)}(u_m) = 0$ . Le théorème 2.10 implique que  $g$  est la fonction nulle.  $\square$

On en déduit la borne optimale dans le problème de Bézivin.

**Théorème 3.3.** *Soit  $q$  un entier tel que  $|q| \geq 2$  et  $f$  une fonction entière sur  $\mathbb{C}$  telle que  $\overline{\lim}_{r \rightarrow +\infty} \frac{\ln|f|_r}{\ln^3 r} < \frac{4s}{27 \ln^2 |q|}$  et  $f^{(\sigma)}(q^n + iq^m) \in \mathbb{Z}[i]$  pour tout  $\sigma \in \llbracket 0, s \rrbracket$  et pour tous  $m, n \in \mathbb{N}$ . Alors,  $f$  est polynôme. De plus, la borne  $\frac{4s}{27 \ln^2 |q|}$  est optimale.*

*Démonstration.* Le théorème 3.2 implique que  $f$  est solution d'une équation aux  $q$ -différences  $\sum_{i=0}^l P_i(z)f(q^i z) = 0$ , où les  $P_i$  sont des polynômes non tous nuls. On en déduit que  $\overline{\lim}_{r \rightarrow +\infty} \frac{\ln|f|_r}{\ln^2 r}$  est fini (voir [10]). Par conséquent, puisque  $f(S_q) \subset \mathbb{Z}[i]$ , par [1, Proposition 4.1],  $f$  est algébrique sur  $\mathbb{C}(z)$ . Comme elle est entière, elle est polynomiale. L'optimalité de la borne est donnée par le théorème 2.15.  $\square$

L'auteur souhaite vivement remercier l'arbitre anonyme qui a permis d'améliorer de manière drastique la qualité de cet article par sa lecture attentive, ses nombreuses remarques et corrections.

## Bibliographie

- [1] J.-P. BÉZIVIN, « Un  $q$ -analogue du théorème de Fukazawa–Gel'fond–Gramain », *Ann. Fac. Sci. Toulouse, Math.* **23** (2014), n° 1, p. 181-195.
- [2] J. DIEUDONNÉ, *Calcul infinitésimal*, Collection méthodes, Hermann, 1968.
- [3] S. FUKASAWA, « Über ganzwertige ganze Funktionen », *Tôhoku Math. Journ.* **27** (1926), p. 41-52.
- [4] A. O. GEL'FOND, « Sur les propriétés arithmétiques des fonctions entières », *Tôhoku Math. J.* **30** (1929), p. 280-285.
- [5] ———, « Sur un théorème de M. G. Polya », *Rendiconti Accad. d. L. Roma* **10** (1929), p. 569-574.
- [6] ———, « Sur les fonctions entières, qui prennent des valeurs entières dans les points  $\beta^n$ ,  $\beta$  est un nombre entier positif et  $n = 1, 2, 3, \dots$  », *Rec. Math. Moscou* **40** (1933), n° 1, p. 42-47.
- [7] ———, « Functions which take on integral values », *Mat. Zametki* **1** (1967), p. 509-513.
- [8] F. GRAMAIN, « Sur le théorème de Fukazawa–Gel'fond », *Invent. Math.* **63** (1981), n° 3, p. 49-506.
- [9] D. MASSER, « Sur les fonctions entières à valeurs entières », *C. R. Math. Acad. Sci. Paris* **291** (1980), p. 1-4.
- [10] J.-P. RAMIS, « About the growth of entire functions solutions of linear algebraic  $q$ -difference equations », *Ann. Fac. Sci. Toulouse, Math.* **1** (1992), n° 1, p. 53-94.
- [11] M. WALDSCHMIDT, *Nombres transcendants*, Lecture Notes in Mathematics, vol. 402, Springer, 1974.
- [12] M. WELTER, « On integer-valued entire functions at the Gaussian integers satisfying additional congruence conditions », *Ann. Sci. Math. Qué.* **31** (2007), n° 1, p. 101-109.

David ADAM

E-mail: davidadam80pf@outlook.fr